Rigidity of quadratic polynomials (Complex dynamics and related fields)

宍倉, 光広

数理解析研究所講究録 1269 巻 2002 年 63-73

Rigidity of quadratic polynomials

Mitsuhiro Shishikura (Kyoto University)

1 English Summery

Let $f_c(z) = z^2 + c$ be the family of quadratic polynomials in the standard form. The *filled Julia set* is defined as

$$K_c = \{z \in \mathbb{C} \mid \{f_c^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ is bounded } \}$$

and the *Mandelbrot set* is

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid K_c \text{ is connected } \} = \{c \in \mathbb{C} \mid \{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ is bounded } \}.$$

For $c \notin M$, there exists Böttcher function $\varphi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \to \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ which is conformal and conjugates f_c to f_0. The *external ray* of angle θ is

$$\mathcal{R}(\theta) = \mathcal{R}_{f_c}(\theta) = \varphi_c^{-1}\left(\{re^{2\pi i\theta} | r > 1\}\right)$$

and the equipotential curve of level $\eta > 1$ is

$$\varphi_c^{-1}\left(\{\eta e^{2\pi i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}\right).$$

It is known that for every rational angle $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, the external ray $\mathcal{R}(\theta)$ lands at a point in ∂K_c which is either periodic or preperiodic. The *landing relation* $\sim_c$ on rational angles $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induced by f_c is defined to be

$$\theta \sim_c \theta' \text{ if and only if } \mathcal{R}_{f_c}(\theta) \text{ and } \mathcal{R}_{f_c}(\theta') \text{ lands at the same point.}$$

We say that two quadratic polynomial f_c and $f_{c'}$ $(c, c' \in M)$ are *combinatorially equivalent* if they define the same landing relation and the multiplier of the non-repelling periodic orbits coincide. We are concerned with the following.

Question (Rigidity). If two quadratic polynomials f_c and $f_{c'}$ $(c, c' \in M)$ combinatorially equivalent, then are they equal, i.e., c=c'?

The positive answer was given in many cases: postcritically finite case by Thurston, the case with non-repelling periodic orbit by Douady and Hubbard, non-renormalizable case (or not infinitely renormalizable case) by Yoccoz. For the question restricted to real c's, it was proved by Sullivan for infinitely renormalizable maps of bouded type, and by Lyubich, Graczyk-Swiatek for unbounded type.

There are several consequences or equivalent statements.

Theorem (Yoccoz). *M is locally connected at $c \in M$ that are not infinitely renormalizable.*

Theorem (Lyubich, Graczyk-Swiatek). *Hyperbolic maps are dense among real quadra polynomials.*

The question remains open for infinitely renormalizable maps which are not real. By a well-known argument due to Sullivan, it is enough to show that f_c and $f_{c'}$ are quasiconformally conjugate in the conclusion of the question.

In this talk, we propose a new proof of the rigidity in the case of non infinitely renormalizable maps and real infinitely renormalizable maps. The method will be explained first for non renormalizable maps (Yoccoz case) and then we will explain how to modify the proof in infinitely renormalizable case.

Step 1. Define the Yoccoz puzzle partition and make a quasiconformal map between corresponding pieces at the *first* level. The map on the boundary of the pieces is canonically given by the construction. The dilatation is uniformly bounded by a constant which depends only on *basic* combinatorics.

Step 2. Pull-back the quasiconformal mapping to higher level pieces in order to get a refinement of the previous correspondence (which are approximation for the desired conjugacy). The pull-back through the critical piece deteriorates the dilatation.

Step 3. It crucial to extend the boundary correspondence of the critical piece to a quasiconformal map with a bounded dilatation. Let f and g be two polynomials in question. Choose appropriate level n of Yoccoz puzzle partition, which can be arbitarily large. Let U^f and U^g be the critical puzzle piece of level n for f and g. There is a given correspondence $\varphi_0 : \partial U^f \to \partial U^g$, and it extends to a quasiconformal mapping. At this point, the dilatation of φ_0 is uncontrolled and it can be very large. We want to know how the dilatation can be if we change φ_0 keeping the boundary value.

Step 4. We formulate the problem in terms of the universal Teichmüller space. Since U^f is a Jordan domain, it is conformally equivalent to $\mathbb{D}$. The universal Teichmüller space is defined to be

$$\mathcal{T}(U^f) = \{(U', \varphi) |\ U' \text{ is a Jordan domain and } \varphi : U^f \to U' \text{ is quasiconformal}\}/\approx,$$

where $(U', \varphi) \approx (U'', \psi)$ if and only if $\psi \circ \varphi^{-1} : U' \to U''$ is isotopic to a conformal map and the isotopy is through homeomorphisms having the same boundary value. The Teichmüller distance is

$$d([(U', \varphi)], [(U'', \psi)]) = \inf\{\log K |\ \text{there exists a } K\text{-qc map isotopic to } \psi \circ \varphi^{-1}\}.$$

Then the question in the previous step is to give a uniform bound on

$$d([(U^g, \varphi_0)], O)$$

where $O = [(U^f, id)]$ is the base point.

Step 5. Define a map $\sigma : \mathcal{T}(U^f) \to \mathcal{T}(U^f)$ via pull-back of conformal structure by the dynamics. We prove:

Theorem. *There are constants $C > 0$ and $0 < \lambda < 1$ with uniform bound such that*
(i) $[(U^g, \varphi_0)]$ *is a fixed point of* σ.
(ii) $d(\sigma(O), O) \le C$.
(iii) $d(\sigma(x), \sigma(y)) \le \lambda d(x, y) \quad (\forall x, y \in \mathcal{T}(U^f))$.

This will lead to an estimate we are looking for.

2 はじめに

複素力学系の研究では，有理関数の反復合成（iteration）による軌道の様子や不変集合の構造，そして，パラメータを変化させたときのこれらの変化を研究する。最近の複素力学系の研究の重要な成果や中心的な未解決問題は，これら力学系の剛性の問題ととらえることができ，さらにこの剛性問題はある種のリーマン面（あるいはそれに類するもの）のタイヒミュラー空間上の自己写像の問題と密接に関係している。この講演では，この見方を中心にいくつかの結果（特に2次多項式について）について解説し，剛性を引き起こすメカニズムについて見ていきたい。

ここでは，「剛性」という言葉を，「ある同値関係が自動的により強い同値関係を導いてしまう現象」という意味で使う。いろいろな同値関係の組み合わせでこの言葉を使うので，(弱い同値関係，強い同値関係）剛性という言い方をすることにする。例えば，複素1次元トーラス（楕円曲線）はすべて微分同相であるが，一般には互いに解析的同型にはならない。すなわち，(微分同相，解析的同型）剛性は成立しない。実際，一つのトーラスから解析構造あるいは等角構造を変形して別の解析的に同型でないトーラスを作ることができるし，このような変形ですべてのトーラスを得ることができる。(このような変形全体の空間を考えるのが後述するタイヒミュラー空間である。）一方，Mostowの剛性定理によれば，二つのコンパクト3次元双曲的多様体が同相なら，それらは等長である。すなわち，コンパクト3次元双曲的多様体については，(同相，等長）剛性が成立する。

3 複素力学系，ジュリア集合，ファトゥー集合

$\hat{\mathbb{C}}$ をリーマン球面とし，$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ を次数が2以上の有理関数とする。f の n 回合成を f^n で表す。f のファトゥー集合 F_f を

$$F_f = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} |\, z \text{ のある近傍 } U \text{ で } \{f^n\}_{n=0}^{\infty} \text{ が同等連続（あるいは正規族）} \right\}$$

で定義し，その補集合 $J_f = \hat{\mathbb{C}} \setminus F_f$ をジュリア集合と呼ぶ。ジュリア集合、あるいは複素力学系の一般的な解説としては [B], [UTM]を参照。ファトゥー集合は開集合，ジュリア集合は閉集合で，ともに f に関して不変な集合となる。f が多項式のときには，充填ジュリア集合を

$$K_f = \{ z \in \mathbb{C} |\, \{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ が有界} \}$$

と定義すれば，$J_f = \partial K_f$ となる。充填ジュリア集合の補集合 $A(\infty) = \hat{\mathbb{C}} \setminus K_f$ は軌道が ∞ に収束するような点からなる。

Sullivanの定理（[Su1], [MS]）によると，ファトゥー集合の各連結成分（ファトゥー成分）は f で何回かうつせば，最終的には（集合として）周期的になる。さらに，周期的なファトゥー成分上では，軌道は吸引的または放物型の周期点に収束するか，円盤または円環上の無理数回転に共役になる。周期的なファトゥー成分は，f の特異点と密接に関連している。ここで特異点とは，

f が局所的に1対1でなくなる点（$z \neq \infty$, $f(z) \neq \infty$ なら $f'(z) = 0$ であることと同値）のことである。例えば，吸引的周期点の吸引領域にはかならず1個の特異点があることが知られている。

DouadyとHubbard[DH2]は，リーマン球面全体で定義された有理関数や多項式の研究をするためにも，次のような擬多項式写像を研究する必要があることを提唱した。U, U' を複素平面内の単連結領域で，U が U' 内で相対コンパクトであるものとし，$g : U \to U'$ を正則なproperな d 対1写像とするとき，$g : U \to U'$ は d 次擬多項式写像であるという。$d = 2$ のときは擬2次式写像という。多項式は適当な領域に制限すれば，同じ次数の擬多項式写像になる。充填ジュリア集合は

$$K_g = \{z \in U | \{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ が定義でき，} U \text{ に属する}\}$$

で，ジュリア集合は $J_g = \partial K_g$ で定義される。$U' \setminus U$ は基本円環と呼ばれる。Douady-Hubbardのstraightening theoremによれば，擬多項式写像は同じ次数のある多項式写像と位相共役であり，この共役写像は擬等角で，充填ジュリア集合上ほとんど到るところ等角となるようにとれる。

4 いろいろな同値関係

この節では後で議論の対象となるいろいろな同値関係を定義する。f, g を有理関数（または多項式）とする。

定義. ある写像 $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ があって，$g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ となるとき，f と g は共役であるという。共役写像 φ が等角写像，擬等角写像（後述），向きを保つ同相写像であるとき，それぞれ，等角共役，擬等角共役，位相共役であるという。

$\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ が等角写像なら，それははメビウス変換（1次分数変換）になるので，等角共役のかわりにメビウス共役といってもよい。 f を2次多項式とするとき，ある $c \in \mathbb{C}$ があって，f と $z^2 + c$ は等角共役（実際にはアファイン写像で共役）になる。$f(z) = z^2 + c_1$, $g(z) = z^2 + c_2$ のとき，f と g が等角共役なら $c_1 = c_2$ となる。すなわち，族 $\{z^2 + c\}$ は2次多項式の等角共役類の代表系となる。

定義. Ω, Ω' を $\mathbb{C}$ の開集合とする。$h : \Omega \to \Omega'$ が擬等角写像であるとは，h が向きを保つ同相であり，超関数の意味の1階偏微分が $L^1_{loc}(\Omega)$ に属し，ある定数 $0 \leq k < 1$ が存在して

$$\left| \frac{h_{\bar{z}}}{h_z} \right| \leq k \quad \text{(a.e.)}$$

をみたすことである。ここに，$h_z, h_{\bar{z}}$ は複素の意味での偏微分である。また，$K = \frac{1+k}{1-k}$ を用いて h は K-擬等角であるともいう。リーマン面上の擬等角写像も座標を用いて定義できる。擬等角写像については [A]参照。

f, g が2次多項式のときに，組み合わせ同値を定義しておこう。その準備として，

定理 (Douady-Hubbard [D], [DH1]). **$f(z) = z^2 + c$ とし，その充填ジュリア集合は連結であるとする。このとき，等角写像 $\varphi : A(\infty) = \hat{\mathbb{C}} \setminus K_f \to \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ (ただし，$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$) であって，$f$ と $z \mapsto z^2$ の共役になる（*i.e.* $z \in A(\infty)$ に対し $\varphi(f(z)) = \varphi(z)^2$）となるものが存在する。$\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し，$\{\varphi^{-1}(re^{2\pi i\theta}) | r > 1\}$ を角度 θ の*external ray*，$\eta > 1$ に対し，$\{\varphi^{-1}(\eta e^{2\pi i\theta}) | \theta \in \mathbb{R}\}$ をポテンシャル η の*equipotential curve*と呼ぶ。θ が分母が奇数の有理数のとき，角度 θ の*external ray* はK_f 上の反発的または放物型周期点に到達する。逆に 反発的または放物型周期点（固有値が1のべき根になる周期点）には上のような*external ray* が到達する。**

もし複数のexternal raysが同じ点に到達しているとすれば，それらの和集合は複素平面を分割し，「組み合わせ的構造」を創り出す。

定義. $f(z) = z^2 + c_1$, $g(z) = z^2 + c_2$ のとし，ともに充填ジュリア集合は連結であるとする。f と g が組み合わせ同値であるとは，
(i) θ と θ' が分母が奇数の有理数でこれらの角度に対する f に関する external rays が同じ周期点に到達するならば，g に関する external rays が同じ周期点に到達し，逆も成立し，
(ii) f が 中立的周期点あるいは超安定周期点をもてば，g もそうで，その固有値（微分）が一致し，逆も成立する
ことをいう。

以上の同値関係の間には自明な強弱関係がある。すなわち，

等角共役 $\Rightarrow$ 擬等角共役 $\Rightarrow$ 位相共役 $\Rightarrow$ 組み合わせ同値

である。したがって，ここで問題にするのは，（組み合わせ同値，位相共役）剛性，（位相共役，擬等角共役）剛性，（擬等角共役，等角共役）剛性などである。

5 タイヒミュラー空間とThurstonの剛性

ここで、後で必要となるタイヒミュラー空間（詳しくは[A],[IT]参照）を定義しておこう。

定義. S_0 をリーマン面とし、(S, h) を S を別のリーマン面と擬等角写像 $h : S_0 \to S$ の組とする。同様な組 (S', h') をもう一つとるとき、同値関係 $(S, h) \approx (S', h')$ を「写像 $h' \circ h^{-1} : S \to S'$ がある等角写像にアイソトピック」で定義する。タイヒミュラー空間を

$$\mathcal{T}(S_0) = \{(S, h) |\ S \text{ はリーマン面、} h : S_0 \to S \text{ は擬等角写像}\} / \approx$$

で、その上のタイヒミュラー距離を

$$d([S, h], [S', h']) = \inf \left\{ \log K \,\middle|\, \begin{array}{l} h' \circ h^{-1} \text{にアイソトピックな} \\ K\text{-擬等角写像が存在}(K \geq 1) \end{array} \right\}$$

で定義する。一般に $\mathcal{T}(S)$ は複素多様体の構造をもち、S が有限型なら有限次元である。擬等角写像 $h : S_0 \to S$ は、引き戻しによって、S の等角構造を S_0 の上に誘導するが、それは（一般には）S_0 上もともとあった等角構造とは異なるものである。従って、タイヒミュラー空間は、S_0 上定義しうる等角構造の全体をイソトピーで分類する空間とも思える。$S = \mathbb{D}$ ととったときは、$\mathcal{T}(\mathbb{D})$ は一点となってしまう。しかし、$\approx$ の定義を境界を動かさないアイソトピーに変えることにすれば、$\mathcal{T}(\mathbb{D})$ は無限次元となり、普遍タイヒミュラー空間と呼ばれる。

タイヒミュラー空間の理論を応用して、次の定理が示される。

定理 (Thurstonの剛性 [DH3]). f, g **をそのすべての特異点が有限な軌道をもつ有理関数（特異有限型と呼ぶ）とする。非常に特殊な例外（簡単に特徴付け可能）を除けば、もし** f **と** g **が位相共役なら、それらは等角共役である。すなわち、このクラスでは、（位相共役、等角共役）剛性が成立する。**

この定理は、球面の特異有限型の分岐被覆に関する定理の特殊な場合である。証明には、リーマン面 S として、$\hat{\mathbb{C}}$ からf のすべての特異点の前軌道を除いたものを考え、分岐被覆 f による等角構造の引き戻し写像を $\mathcal{T}(S)$ に誘導し、その弱縮小性から不動点の唯一性を導き、それが上述の剛性に対応するという事実を使う。実際、引き戻し写像 $\sigma_f : \mathcal{T}(S) \to \mathcal{T}(S)$ の弱縮小性は、$\mathcal{T}(S)$ の余接空間である可積分正則２次微分の空間への作用を見ることによって得られる。

6 双曲型写像と擬等角変形

定義. 有理関数 $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ は、各特異点の軌道がある吸引的周期軌道に収束するとき、双曲型と呼ばれる。

双曲型写像は、複素力学系の中でもっともよくわかっているクラスである。例えば、少し写像を変化させても、ジュリア集合はほとんど変化しないし、もとの写像と、非常に弱い条件の下で共役になる。(構造安定性) また、記号力学系による表現も可能で、ジュリア集合のハウスドルフ測度などについても詳しい結果が分かっている。このような写像は複素力学系の中で「沢山」あると予想されている。

予想 (双曲型の稠密性). 双曲型写像は、次数 $d\geq 2$ の有理関数全体(あるいは多項式全体)の中で稠密である。

この予想は、次数2の多項式に限っても未解決である。次数2の多項式の場合には、$f_c(z)=z^2+c$ が双曲型となるような $c\in\mathbb{C}$ が稠密であることを示せばよい。この予想は、以下に述べるMLC予想と密接に関連している。

定義. 2次多項式 $f_c(z)=z^2+c$ のジュリア集合は、その特異点 $z=0$ の軌道が無限大に発散するか有界にとどまるかに応じて、完全不連結な集合となったり、連結な集合となったりする。マンデルブロート集合を

$$M=\{c\in\mathbb{C}|\ J_{f_c}\ \text{が連結}\}=\{c\in\mathbb{C}|\ \{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}\ \text{が有界}\}$$

と定義する。

予想 (MLC、マンデルブロート集合の局所連結性). マンデルブロート集合 M は局所連結である。

定理 (Douady-Hubbard [DH1]). もし、MLC予想が正しければ、2次多項式の中で双曲型のものは稠密である。

この定理の証明はマンデルブロート集合の組み合わせ構造に関するDouady-Hubbardの理論から証明される。この理論では、$\mathbb{C}$ 内の連結コンパクト集合であるマンデルブロート集合についても、external rayやequipotential curveを定義し、これらの組み合わせ的構造と、対応するジュリア集合のそれとの対応関係を記述するものである。また非双曲型2次多項式の組み合わせ同値による分類は、M のexternal raysによる分割に対応している。上の二つの予想は次のように言い換えられる。

定理. 2次多項式の中で双曲型の稠密性は、非双曲型2次多項式の組み合わせ同値類が内点をもたないことと同値である。
MLC予想は、非双曲型2次多項式の組み合わせ同値類が1点であることと同値である。

従って、MLC予想を示すには、非双曲型2次多項式について(組み合わせ同値, 等角共役)剛性がいえれば、MLC予想が示されることになる。実はさらに、

定理. 非双曲型2次多項式について(組み合わせ同値, 擬等角共役)剛性がいえれば、MLC予想が成立する。[Su2]

これは次のように擬等角変形を用いたSullivanの論法により示される。まず、二つの相異なる2次多項式$f(z) = z^2 + c_1$, $g(z) = z^2 + c_2$ が擬等角共役であるとする。共役写像を $w = \varphi(z)$ とすると、標準的計量の引き戻しは、$|dw|^2 = |\varphi_z dz + \varphi_{\bar{z}} d\bar{z}|^2 \sim |dz + \mu(z) d\bar{z}|^2$ (ただし、$\mu(z) = \frac{\varphi_{\bar{z}}}{\varphi_z}$) と等角同値になり、$\|\mu(z)\|_\infty < 1$ となる。$f \neq g$ より $\mu(z) = 0 \quad a.e.$ となり得ない。$\lambda \in \mathbb{C}$ で、$\|\lambda\mu(z)\|_\infty < 1$ となるものをとると、$|dz + \lambda\mu(z) d\bar{z}|^2$ も f で不変な可測計量を定義するが、可測リーマン写像定理によれば、$\hat{\mathbb{C}}$ に $|dz + \lambda\mu(z) d\bar{z}|^2$ を付与したものもリーマン球面と等角同型となり、f はその上の正則写像を誘導する。これは、2次多項式の形をしていると考えてよいから、この操作により、f と擬等角共役な多項式 $z^2 + c(\lambda)$ が得られたことになる。これを f の擬等角変形という。特に $c(0) = c_1$, $c(1) = c_2$ である。$c(\lambda)$ は解析的であり定数でないので、それによる $\{|\lambda| < 1/\|\mu(z)\|_\infty\}$ の像は開集合である。ここから、

命題. **2次多項式 $f(z) = z^2 + c$ の中で、各擬等角共役同値類は1点かまたは開集合である。** [Su2], [MS]

一方、

補題. **非双曲型2次多項式の組み合わせ同値類は閉集合である。**

ここから、上記定理が示される。

以後は、非双曲型2次多項式$f(z) = z^2 + c$ について、どのような条件のもとで擬等角共役が得られるかを見ていこう。写像が双曲的な場合や特異有限な場合、放物型不動点をもつ場合、(組み合わせ同値，擬等角共役) 剛性については、Douady-Hubbard等により早くから知られていた。問題になるのはそれ以外の場合である。

7 Sullivanのくりこみ理論

定義. $c \in \mathbb{R}$ のとき、2次多項式 $f(x) = x^2 + c$ は実軸からそれ自身の写像を定義する。f がくりこみ可能とは、自然数 $k \geq 2$ と、特異点 $x = 0$ を内部に含む閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ が存在して、$f^k(I) \subset I$ かつ $I, f(I), \cdots, f^{k-1}(I)$ が端点以外で交わらないようにできることをいう。k をくりこみの周期、$f^k|_I : I \to I$ をくりこみという。

無限個の周期 $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \ldots$ に対してくりこみ可能の時、無限回くりこみ可能であるという。さらにこのとき、$\{k_n\}$ をf のすべてのくりこみの周期とし、k_{n+1}/k_n が有界なら有界型であるという。

定理 (Sullivan [Su2]). **有界型の無限回くりこみ可能な実2次多項式については、(組み合わせ同値、等角共役) 剛性が成立する。**

前節で述べたようにここでは擬等角共役まで示せば十分である。さらに、実2次多項式 f,g については、もし f , g が 組み合わせ同値のときに、ある擬対称写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して、h が f , g の特異点の前軌道上での共役を与えることのみを示せば十分である。(引き戻しの方法) ここで、

定義. 向きを保つ同相写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が擬対称とは、ある $M \geq 1$ があって、

$$\frac{1}{M} \leq \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq M$$

がすべての $x \in \mathbb{R}$ と $t > 0$ について成立することをいう。また、この条件は、h が、$\mathbb{C}$ からそれ自身への擬等角写像に拡張できることと同値であることが知られている。[A]

特異点の前軌道上での共役を作ることは、くりこみに現れる区間 I_n とその像たち $I_n, \ldots, f^{k_n-1}(I_n)$ は入れ子になった区間の族を作るが、それが各ステップごとに一様有界な比率をもつことを用いて構成される。(実アプリオリ評価)

Sullivan[Su2] はさらにここから進んで、「複素アプリオリ評価」を示し、リーマン面族からなるある種のlaminationを考え、それにたいするタイヒミュラー空間を定義し、くりこみが誘導するタイヒミュラー空間の自己写像の縮小性からくりこみの収束に関する結果を導いている。

8 Yoccozの局所連結性に関する結果

一方、無限回くりこみ不可能な写像については、Yoccoz ([Y], [Hu]) による画期的な結果がある。

定義. 複素2次多項式 $f(z) = z^2 + c$ がくりこみ可能とは、自然数 $k \geq 2$ と、特異点 $z = 0$ を含む領域 $U \subset U'$ が存在して、f^k の制限 $f^k|_U : U \to U'$ が擬2次式写像になり、しかも充填ジュリア集合 $K_{(f^k|_U)}$ が連結になることをいう。周期や無限回くりこみ可能性については、実の場合と同様に定義できる。

定理 (Yoccoz [Y]). $f(z) = z^2 + c$ **は連結なジュリア集合をもち** ($c \in M$)**、すべての周期点 (∞以外) は反発的で、無限回くりこみ可能ではないとする。このとき、**
(a) J_f **は局所連結である。**
(b) M **は** c **で局所連結である。**

その証明では、J_c および M を有理数の角度のexternal rays (およびequipotential curves) で分割し (この分割をYoccoz puzzleという)、その分割の各成分が分割を細かくするとともに実際に小さくなることを証明している。ここから、上記定理の条件を満たす写像のクラスでは、(組み合わせ同値、等角共役) 剛性が成立することがわかる。同じアイデアをさらに進めて、次を示すことができる。

定理 (Lyubich((a)のみ)[Ly], 宍倉[Sh1]). $f(z) = z^2 + c$ **は連結なジュリア集合をもち** ($c \in M$)**、すべての周期点 (∞以外) は反発的で、無限回くりこみ可能ではないとする。このとき、**
(a) J_f **の2次元ルベーグ測度は0である。**
(b) **上記条件をみたす** $c \in M$ **の集合の2次元ルベーグ測度は0である。**

Yoccozの方法は2次多項式族 $z^2 + c$ の代わりに高次の族 $z^d + c$ ($d \geq 3$) で置き換えると通用しなくなってしまう。

9 Lyubich, Graczyk-Swiatekの結果

実の2次多項式についても双曲型の稠密性は昔からの未解決問題であった。これについて Lyubich[Ly], Graczyk-Swiatek[GS1]が最終的に解決した。

定理 (Lyubich, Graczyk-Swiatek). **実2次多項式** $f(x) = x^2 + c$ ($c \in \mathbb{R}$) **の中で双曲型のものは稠密である。**

この定理は、6節のときと同様に、次から従う

定理 (Lyubich, Graczyk-Swiatekの剛性定理). 実2次多項式 $f(x) = x^2 + c_1$, $g(x) = x^2 + c_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ が無限回くりこみ可能であるとする。もし、f と g が組み合わせ同値なら、それらは擬対称共役である。

すなわち、無限回くりこみ可能な実2次多項式については、(組み合わせ同値, 擬対称共役) 剛性が成立する。

Sullivanが既に、有界型については結果を出しているので、問題は非有界型の場合である。このときは、くりこみ周期の列 $\{k_n\}$ に対し、k_{n+1}/k_n が非常に大きくなるような n が無限個でてくる。その際には、くりこみに対応する区間 I_n と I_{n+1} の比が非常に大きくなり、その間での擬対称共役の構成が問題となる。LyubichとGraczyk-Swiatekは、Yoccoz puzzleの中心円環列に対するモデュラスの線型的増大を示すことによって、この問題を回避した。

ただし、「中心円環列に対するモデュラスの線型的増大」は、族 $z^2 + c$ を高次の族 $z^d + c$ $(d \geq 3)$ で置き換えたときには、成立しないことがわかっている。そして、上の二つの定理は高次の族については、未解決である。

10　普遍タイヒミュラー空間を用いる方法

前節の剛性定理は、2次多項式に対する一つの重要な到達点であるが、その手法が高次の族に通用しないこと、そして証明自身がかなり難解なこともあり、その改良が期待されていた。本講演では、普遍タイヒミュラー空間を用いて、前節の剛性定理を証明する方法について述べたい。

まず、次のような複素アプリオリ評価が知られている。特にSandsの証明は簡便。

定理 (Levin-van Strien[LvS], [LY], [GS2], [Sa]). 実2次多項式 $f(x) = x^2 + c$ $(c \in \mathbb{R})$ が無限回くりこみ可能であるとする。その擬2次式としてのくりこみの列 $\{f^{k_n}|_{U_n} : U_n \to U'_n\}$ について、その基本円環 $U'_n \setminus U_n$ のモデュライは下から一様に評価できる。

7節の精神で擬対称共役を作ろうとすれば、次を示せばよいことがわかる。

定理 (一様評価付きの部分共役[Sh2]). 擬2次式 $f : U \to U'$ がくりこみ可能であるとし、$\{f^k|_{U_1} : U_1 \to U'_1\}$ をその最初のくりこみとする。$g : V \to V'$ も擬2次多項式で、f と組み合わせ同値であるとする。このとき、擬等角写像 $\varphi : U' \to V'$ が存在し、φ は U_1 以外では f から g への共役である。すなわち、

$$\varphi \circ f(z) = g \circ \varphi(z) \quad (z \in U \setminus U_1)$$

さらに、φ の擬等角歪率 K は、f と g の基本円環 $U' \setminus U$, $V' \setminus V$ のモデュラスにのみ依存し、くりこみの周期などには依存しない。

ここで重要なのは擬等角歪率の一様評価で、無限回くりこみ可能な f が与えられたとき、そのくりこみの列 $\{f^{k_n}|_{U_n} : U_n \to U'_n\}$ に対し、この定理を適用して、一様評価付きの部分共役を作り、それを組み合わせて、特異点の前軌道上の擬対称共役を構成するのである。

最後の定理の証明には次のように普遍タイヒミュラー空間が利用できる。f と g についてそれぞれYoccoz puzzleを構成する。Puzzleの対応ピース同士の間には少なくとも境界上では自然な対応がある。問題はこれがピースの内部まで歪率の一様評価をもつ擬等角写像に拡張できるかどうかである。まず、U^f (そして g に関して対応する U^g) はYoccoz puzzleのピースであるとしてよい。もしも、自然な境界対応 $\varphi_0 : \partial U^f \to \partial U^g$ がその内部へ K-擬等角写像として拡張できるなら (共役でなくてよい!), それをこのピースの逆像たちへ「引き戻して」いくことにより、定理の主

張のような部分共役が作れ、その歪率は K のみに依存することがわかる。したがって、以後は境界対応の拡張のみに注目する。もちろん今の段階では K については何の情報もない。

境界対応$\varphi_0 : \partial U^f \to \partial U^g$ の任意の擬等角拡張は、$U^f(\simeq \mathbb{D})$ の普遍タイヒミュラー空間

$$\mathcal{T}(U^f) = \{(U', \varphi) | \; U' \text{ is a Jordan domain and } \varphi : U^f \to U' \text{ is quasiconformal}\} / \approx,$$

(ただし、同値関係 $(U', \varphi) \approx (U'', \psi)$ は、$\psi \circ \varphi^{-1} : U' \to U''$ 境界値を保つイソトピーで等角写像まで変形できることとする。) の一つの元 $[(U^g, \varphi_0)]$ を定義することに注意する。定理での一様評価を言うには、この元と中心点 $O = [(U^f, id_{U_1})]$ とのタイヒミュラー距離 $d([(U^g, \varphi_0)], O)$ の一様評価が得られればよいのである。さて、普遍タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(U^f)$ の元を今度は U^f 上の等角構造の集合と考えることにより、f による等角構造の引き戻しが定義できる。f が単葉になるピースでのみ引き戻していくと、それが再び U^f まで戻ってきて、U^f の新しい等角構造を定義する。すなわち、この引き戻しは普遍タイヒミュラー空間の自己写像 $\sigma : \mathcal{T}(U^f) \to \mathcal{T}(U^f)$ を定義する。$[(U^g, \varphi_0)]$ については、その構成から σ の不動点となる。この写像について次の評価が得られる。

定理. **f と g の基本円環のモデュラスにのみ依存する定数 $C > 0$ と $0 < \lambda < 1$ があって、**
(i) $[(U^g, \varphi_0)]$ **は** σ **の不動点.**
(ii) $d(\sigma(O), O) \leq C$.
(iii) $d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad (\forall x, y \in \mathcal{T}(U_1))$.

以上から容易に不動点までの距離 $d([(U^g, \varphi_0)], O)$ の一様評価が得られることになる。

補題の証明は, (i)については、σ の構成と、普遍タイヒミュラー空間の定義から従い、(ii), (iii)については、8 節でのYoccozの組み合わせ評価を、σ の余接写像に適用することによって得られる。

参考文献

[A] L. V. Ahlfors, Lectures on quasiconformal mappings, Van Nostrand Co., 1966.

[B] A. Beardon, Iteration of rational functions. Complex analytic dynamical systems. Graduate Texts in Mathematics, 132. Springer-Verlag, New York, 1991.

[D] A. Douady, Systèmes dynamiques holomorphes. Bourbaki seminar, Vol. 1982/83, 39–63, Astérisque, 105-106, Soc. Math. France, Paris, 1983.

[DH1] A. Douady and J. H. Hubbard, Étude dynamique des polynômes complexes. Partie I-II. Publications Mathématiques d'Orsay , 84-2, 85-4.

[DH2] ——, On the dynamics of polynomial-like mappings. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 18 (1985), no. 2, 287–343.

[DH3] ——, A proof of Thurston's topological characterization of rational functions. Acta Math. 171 (1993), no. 2, 263–297.

[GS1] J. Graczyk and G. Świątek, Generic hyperbolicity in the logistic family. Ann. of Math. (2) 146 (1997), no. 1, 1–52.

[GS2] ——, Polynomial-like property for real quadratic polynomials. Topology Proc. 21 (1996), 33–112.

[GS3] ——, The real Fatou conjecture. Annals of Mathematics Studies, 144. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

[Hu] J.H. Hubbard, Local connnectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz. Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991), 467–511, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.

[IT] 今吉-谷口, タイヒミュラー空間論, 日本評論社, 1989.

[LvS] G. Levin and S. van Strien, Local connectivity of the Julia set of real polynomials. Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 3, 471–541.

[Ly] M, Lyubich, Dynamics of quadratic polynomials. I, II. Acta Math. 178 (1997), no. 2, 185–247, 247–297.

[LY] M, Lyubich and M, Yampolsky, Dynamics of quadratic polynomials: complex bounds for real maps. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 47 (1997), no. 4, 1219–1255.

[McM] C. T. McMullen, Complex dynamics and renormalization. Annals of Mathematics Studies, 135. Princeton University Press, 1994.

[MS] C.T. McMullen and D. P.Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system. Adv. Math. 135 (1998), no. 2, 351–395.

[Sa] In peparation.

[Sh1] In peparation.

[Sh2] In peparation.

[Su1] D. P. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou–Julia problem on wandering domains. Ann. of Math. (2) 122 (1985), no. 3, 401–418.

[Su2] ——, Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures. American Mathematical Society centennial publications, Vol. II , 417–466, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[UTM] 上田, 谷口, 諸澤, 複素力学系序説, 培風館, 1995.

[Y] J.-Ch. Yoccoz, In preparation.